Tentamen i Matematisk fysik FTF131

Måndagen den 24 augusti 2015

Examinator: Henrik Johannesson, tel. 0768-237042.
Inga hjälpmedel är tillåtna på denna tentamen.
Resultat meddelas individuellt via e-post.

Tentamen består av fem uppgifter där varje uppgift ger maximalt 5 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade efter svårighetsgrad.

Strukturera Dina lösningar noggrant. **Uppställda samband skall motiveras**, gärna med en översiktlig skiss av tankegång och bärande element! Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

---

1. (a) Vad är en *retarderad* Green's funktion? Vad är en *avancerad* Green's funktion? Vilken av dessa två typer av Green's funktioner är mest användbar i fysiktillämpningar? Motivera!

(b) Betrakta differentialekvationen

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r})u(\boldsymbol{r}) \tag{1}$$

i ett område Ω, med givna randvillkor. Låt $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ vara motsvarande Green's funktion. Använd $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ för att skriva om (1) som en integralekvation. Hur uttrycks randvillkoren i denna integralekvation?

2. Beskriv en metod att lösa integralekvationen

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi \cos(x+t)\varphi(t)\, dt.$$

För vilka värden på λ existerar en lösning?

3. En partikel med vilomassan m_0 rör sig med en hastighet nära ljushastigheten c och beskrivs av Lagrangefunktionen

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{c^2}} - U(\boldsymbol{r})$$

där $U(\boldsymbol{r})$ är den potentiella energin.

(a) Härled partikelns rörelseekvation och visa att den kan tolkas som Newtons andra lag, med massan $m = m_0/\sqrt{1 - \dot{\boldsymbol{r}}/c^2}$.

(b) Ta fram ett uttryck för partikelns energi i den icke-relativistiska gränsen $|\dot{\boldsymbol{r}}| \ll c$.

4. (a) I de postulat som bestämmer (icke-relativistisk) kvantmekanik uppträder de matematiska begreppen (i) *normerad vektor,* (ii) *Hilbertrum,* (iii) *självadjungerad operator,* och (iv) *inre produkt.* Definiera (i) - (iv).

(b) Ett av kvantmekanikens postulat säger att ett tillstånd $|\psi\rangle$ vid en mätning "kollapsar" till ett av egentillstånden till den operator som representerar det man vill mäta ("observabeln"). I ett annat postulat sägs att tidsutvecklingen av ett fysikaliskt system kontrolleras av Schrödingerekvationen. Är dessa två påståenden verkligen förenliga? Vari ligger den möjliga problematiken? Diskutera!

5. (a) Skriv följande permutationer som en produkt av disjunkta cykler och bestäm deras ordningar (där *ordningen* av en permutation är den minsta gemensamma multipeln till cyklernas längder).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 1 & 5 & 2 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1}.$$

(b) Skriv permutationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

som en produkt av transpositoner (där en *transposition* är detsamma som en 2-cykel). Visa att varje sådan produkt måste innehålla minst fyra transpositioner.